
สารบัญภาพ

หน้า

บทที่ 1 ฟังก์ชัน ลิมิต และความต่อเนื่อง

| | |
|---|----|
| รูปที่ 1.1 ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน | 1 |
| รูปที่ 1.2 การค้นหาโปรแกรม FreeMat | 3 |
| รูปที่ 1.3 การดาวน์โหลดโปรแกรม FreeMat | 4 |
| รูปที่ 1.4 ขั้นตอนที่ 1 ของการดาวน์โหลดโปรแกรม FreeMat | 4 |
| รูปที่ 1.5 ขั้นตอนที่ 2 ของการดาวน์โหลดโปรแกรม FreeMat | 5 |
| รูปที่ 1.6 ขั้นตอนการประมวลผลโปรแกรม FreeMat | 5 |
| รูปที่ 1.6 (ก-ค) การประมวลผลโปรแกรม FreeMat | 6 |
| รูปที่ 1.6 (ช-ฎ) การประมวลผลโปรแกรม FreeMat | 7 |
| รูปที่ 1.7 การเปิดใช้งานของโปรแกรม FreeMat | 8 |
| รูปที่ 1.7 (ก) พิมพ์ค้นหา FreeMat | 8 |
| รูปที่ 1.8 การทำงานของโปรแกรม FreeMat | 9 |
| รูปที่ 1.9 การพิมพ์กำหนดฟังก์ชันและค่าตัวแปรต่าง ๆ ของโปรแกรม FreeMat | 10 |
| รูปที่ 1.10 ค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่ได้จากการประมวลผลของโปรแกรม FreeMat | 11 |
| รูปที่ 1.11 โปรแกรม FreeMat ในการคำนวณ $f(x) = 20,000 + 0.12x$ | 13 |
| รูปที่ 1.12 รูปแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ | 16 |
| รูปที่ 1.13 โปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + 1)$ | 21 |
| รูปที่ 1.14 โปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 + 1)$ | 22 |
| รูปที่ 1.15 การสร้างกราฟของโปรแกรม FreeMat | 23 |
| รูปที่ 1.16 การพิมพ์กำหนดเพื่อสร้างกราฟของโปรแกรม FreeMat | 23 |
| รูปที่ 1.17 การบันทึกไฟล์กราฟของโปรแกรม FreeMat | 24 |

| | |
|--|----|
| รูปที่ 1.18 การประมวลผลกราฟของโปรแกรม FreeMat | 24 |
| รูปที่ 1.19 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 1)$ | 25 |
| รูปที่ 1.20 โปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x^3 - 1)$ | 26 |
| รูปที่ 1.21 โปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - 1)$ | 27 |
| รูปที่ 1.22 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x^3 - 1)$ | 28 |
| รูปที่ 1.23 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right)$ | 29 |
| รูปที่ 1.24 กราฟของ $f(x)$ | 33 |
| รูปที่ 1.25 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ลิมิตของฟังก์ชัน | 34 |
| รูปที่ 1.26 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ $x \rightarrow +\infty$ มีค่าเท่ากับ L | 38 |
| รูปที่ 1.27 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ $x \rightarrow -\infty$ มีค่าเท่ากับ L | 38 |
| รูปที่ 1.28 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ $x \rightarrow \infty$ มีค่าเท่ากับบวกอนันต์ | 39 |
| รูปที่ 1.29 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ $x \rightarrow \infty$ มีค่าเท่ากับลบอนันต์ | 40 |
| รูปที่ 1.30 $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้แกน x เมื่อ x มีค่ามากขึ้น | 41 |
| รูปที่ 1.31 $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้แกน x เมื่อ x มีค่าน้อยลง | 41 |
| รูปที่ 1.32 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $f(x) = -x^2 + x + 1$ | 49 |
| รูปที่ 1.33 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = 2$ | 50 |
| รูปที่ 1.34 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$ | 51 |
| บทที่ 2 อนุพันธ์ | |
| รูปที่ 2.1 กราฟของอนุพันธ์ | 59 |
| รูปที่ 2.2 ความสัมพันธ์จตุภาคและตรีโกณมิติ | 78 |
| รูปที่ 2.3 ตรีโกณมิติกับสามเหลี่ยมมุมฉาก | 78 |

| | หน้า |
|---|------|
| รูปที่ 2.4 ฟังก์ชันประกอบ | 95 |
| รูปที่ 2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ 3 ฟังก์ชัน | 95 |
| บทที่ 3 การประยุกต์ของอนุพันธ์ | |
| รูปที่ 3.1 ฟังก์ชันเพิ่ม | 115 |
| รูปที่ 3.2 ฟังก์ชันลด | 116 |
| รูปที่ 3.3 ฟังก์ชันค่าคงตัว | 116 |
| รูปที่ 3.4 กราฟของฟังก์ชันเพิ่ม | 117 |
| รูปที่ 3.5 กราฟของฟังก์ชันลด | 118 |
| รูปที่ 3.6 กราฟแสดงค่าสุดขีดสัมบูรณ์ | 121 |
| รูปที่ 3.7 กราฟแสดงค่าสุดขีดสัมพัทธ์ | 122 |
| รูปที่ 3.8 กราฟแสดงความชันของเส้นสัมผัส | 123 |
| รูปที่ 3.9 กราฟแสดงค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ | 124 |
| รูปที่ 3.10 โปรแกรม FreeMat | 127 |
| รูปที่ 3.11 การประมวลผลของโปรแกรม FreeMat | 128 |
| รูปที่ 3.12 การบันทึกไฟล์และประมวลผลของโปรแกรม FreeMat | 128 |
| รูปที่ 3.13 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$ | 129 |
| รูปที่ 3.14 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}}$ | 132 |
| รูปที่ 3.15 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^4 - 5$ | 133 |
| รูปที่ 3.16 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก | 138 |
| รูปที่ 3.17 อัตราการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ | 140 |
| รูปที่ 3.18 อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว | 141 |
| รูปที่ 3.19 การเคลื่อนที่ของรถยนต์ | 142 |

| | หน้า |
|--|------|
| รูปที่ 3.20 กราฟของระยะทาง | 142 |
| รูปที่ 3.21 กราฟของความเร็ว | 143 |
| รูปที่ 3.22 กราฟของความเร่ง | 143 |
| รูปที่ 3.23 การเคลื่อนที่แนวโค้ง | 144 |
| รูปที่ 3.24 การเคลื่อนที่ของเครื่องเล่นดิ่งพวงมาลัย | 147 |
| รูปที่ 3.25 ลูกโป่งที่บรรจุแก๊สฮีเลียม | 148 |
| รูปที่ 3.26 อ่างเก็บน้ำทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก | 149 |
| รูปที่ 3.27 ถังโลหะทรงกระบอก | 150 |
| รูปที่ 3.28 กรวยกลม | 151 |
| บทที่ 6 การประยุกต์ของอนุพันธ์ | |
| รูปที่ 6.1 พื้นที่ A ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรงและเส้นโค้ง | 245 |
| รูปที่ 6.2 สี่เหลี่ยมมุมฉากบนช่วงย่อย n จำนวน | 246 |
| รูปที่ 6.3 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง 2 เส้น | 251 |
| รูปที่ 6.4 การสร้างสี่เหลี่ยมมุมฉากให้ตั้งฉากกับแกน x | 252 |
| รูปที่ 6.5 การเคลื่อนสี่เหลี่ยมมุมฉากไปตามแนวแกน x | 252 |
| รูปที่ 6.6 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง 2 เส้น | 253 |
| รูปที่ 6.7 การสร้างสี่เหลี่ยมมุมฉากให้ตั้งฉากกับแกน y | 253 |
| รูปที่ 6.8 การเคลื่อนสี่เหลี่ยมมุมฉากไปตามแนวแกน y | 254 |
| รูปที่ 6.9 พื้นที่ทั้งหมดจากการรวมกันของ A_1 และ A_2 | 254 |
| รูปที่ 6.10 เว็บไซต์ GeoGebra Classic | 255 |
| รูปที่ 6.11 การวาดกราฟบนเว็บไซต์ | 256 |
| รูปที่ 6.12 การติดตั้ง GeoGebra Classic Application | 256 |

| | หน้า |
|---|------|
| รูปที่ 6.13 การติดตั้ง GeoGebra Classic Application เสร็จสมบูรณ์ | 257 |
| รูปที่ 6.14 GeoGebra Classic Application | 257 |
| รูปที่ 6.15 การวาดกราฟบน GeoGebra Classic Application | 258 |
| รูปที่ 6.16 พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 9 - x^2$ และแกน x | 259 |
| รูปที่ 6.17 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน x | 259 |
| รูปที่ 6.18 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน y | 260 |
| รูปที่ 6.19 พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$ และเส้นตรง $y = 4x$ | 261 |
| รูปที่ 6.20 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน x | 262 |
| รูปที่ 6.21 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน y | 262 |
| รูปที่ 6.22 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน x | 263 |
| รูปที่ 6.23 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน y | 264 |
| รูปที่ 6.24 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน x | 265 |
| รูปที่ 6.25 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน y | 266 |
| รูปที่ 6.26 พื้นที่เคลื่อนที่ตามแนวแกน x | 267 |
| รูปที่ 6.27 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง โดย x เป็นแกนการหมุน | 269 |
| รูปที่ 6.28 ปริมาตรของรูปทรงตัน | 270 |
| รูปที่ 6.29 ปริมาตรของการตัดส่วนที่ i | 271 |
| รูปที่ 6.30 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง | 272 |
| รูปที่ 6.31 ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ΔA_i รอบแกน x | 272 |
| รูปที่ 6.32 ปริมาตรของการตัดส่วนที่ i | 273 |
| รูปที่ 6.33 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง โดย y เป็นแกนการหมุน | 274 |
| รูปที่ 6.34 ปริมาตรของรูปทรงตัน | 274 |
| รูปที่ 6.35 ปริมาตรของการตัดส่วนที่ i | 275 |

| | หน้า |
|---|------|
| รูปที่ 6.36 พื้นที่ A ที่ถูกปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง | 275 |
| รูปที่ 6.37 ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ΔA_i รอบแกน y | 276 |
| รูปที่ 6.38 ปริมาตรของการตัดส่วนที่ i | 276 |
| รูปที่ 6.39 รูปพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและแกน x โดยใช้โปรแกรม GeoGebra | 277 |
| รูปที่ 6.40 รูปพื้นที่ | 278 |
| รูปที่ 6.41 การตัดของการหมุนพื้นที่ | 278 |
| รูปที่ 6.42 หน้าตัดของการหมุนพื้นที่ | 278 |
| รูปที่ 6.43 รูปพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ | 280 |
| รูปที่ 6.44 การตัดของการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและเส้นตรง | 280 |
| รูปที่ 6.45 หน้าตัดของการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและเส้นตรง | 281 |
| รูปที่ 6.46 การตัดของการหมุนพื้นที่ที่หมุนรอบเส้นตรง $x = 2$ | 282 |
| รูปที่ 6.47 หน้าตัดของการหมุนพื้นที่ที่หมุนรอบเส้นตรง $x = 2$ | 282 |
| รูปที่ 6.48 พื้นที่ A | 284 |
| รูปที่ 6.49 ปริมาตร V | 284 |
| รูปที่ 6.50 ปริมาตร ΔV_i | 285 |
| รูปที่ 6.51 ปริมาตร ΔV_i โดยคลี่แผ่นเส้นรอบวงออก | 285 |
| รูปที่ 6.52 พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y^2 = 27x$ | 287 |
| รูปที่ 6.53 ปริมาตรของเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y^2 = 27x$ | 287 |
| รูปที่ 6.54 พื้นที่ของเส้นโค้ง $y^2 = x - 1$ เส้นตรง $y = 3 - x$ และแกน x | 289 |
| รูปที่ 6.55 ปริมาตรของเส้นโค้ง $y^2 = x - 1$ เส้นตรง $y = 3 - x$ และแกน x | 290 |